LES SYSTEMES LOGIQUES COMBINATOIRES

1 CONVENTIONS DE LA LOGIQUE

1.1 Généralités:

Le traitement des informations se fait sous forme binaire. Les informations peuvent sortir d'un capteur T.O.R (Tout Ou Rien), mais également d'un capteur numérique.

1.2 Caractéristiques du signal binaire

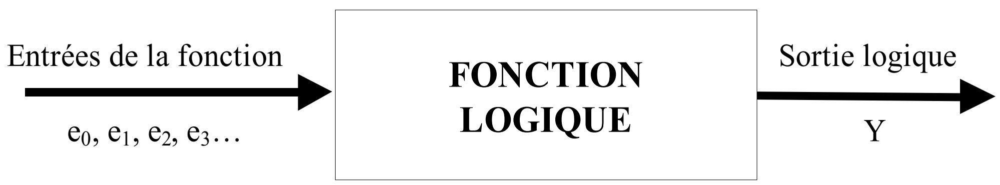
Un signal binaire est défini par deux valeurs de potentiels auxquelles correspondent deux niveaux logiques:

- le niveau Haut : H (High en anglais),
- le niveau Bas : L (Low en anglais).

Le niveau Haut est représentatif d'un potentiel supérieur au potentiel correspondant au niveau Bas.

2 FONCTIONS LOGIQUES

Les fonctions logiques permettent d'associer une sortie logique **Y** à une ou plusieurs entrées logiques ($\mathbf{e_0}$, $\mathbf{e_1}$, ... $\mathbf{e_n}$).



2.1 Outils de description d'une fonction logique

La description d'une fonction logique peut être faite :

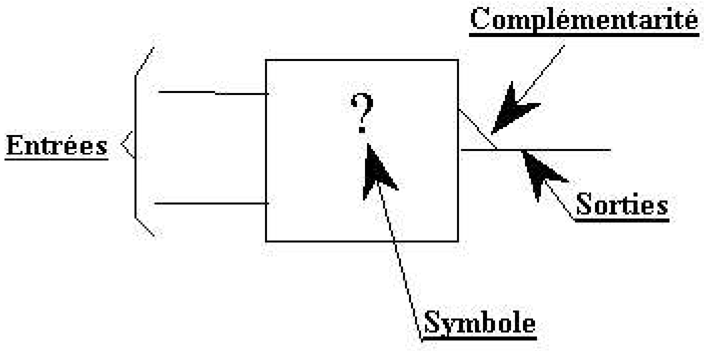
- graphiquement,
- par une table de vérité ou de fonctionnement
- par une équation booléenne.
-

2.1.1 Les représentations des opérateurs logiques binaires

D'après la Norme française NF C 03.212, les fonctions logiques élémentaires se symbolisent par des logigrammes qui ne dépendent pas de la technologie.

Ils se présentent de la manière suivante :

- la cellule logique schématisée par un carré,
- le type de fonction logique indiqué par un symbole à l'intérieur du carré,
- les entrées par convention à gauche,
- la ou les sorties par convention à droite,
- la complémentarité représentée par une barre à l'entrée ou à la sortie de la cellule logique.
-



2.1.2 La table de vérité

Une table de vérité permet de visualiser les états logiques de sortie en fonction des états logiques des entrées

Elle permet également de mettre en évidence toutes les possibilités de fonctionnement.

Elle se présente sous la forme d'un tableau possédant :

- une colonne par variable d'entrée,
- plus une colonne par variable de sortie,
- la première ligne pour inscrire les identificateurs des variables,
- plus **N** lignes correspondant au nombre de combinaisons possibles des variables d'entrées. Cette valeur est calculée à l'aide de la formule suivante :

$$N = 2^{n}$$

où **n** correspond au nombre de variables d'entrée.

c	b	a	S
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Table de vérité remplie en code binaire naturel

Pour remplir les tables de vérité, en ce qui concerne les variables d'entrée, le binaire réfléchi est généralement utilisé. Ce code présente l'avantage qu'une seule variable d'entrée évolue d'une ligne à l'autre. Ce qui en pratique est plus facilement réalisable.

Le binaire naturel, correspondant à l'écriture de la suite des chiffres en base 2, est néanmoins quelques fois employé pour les tables de vérité.

c	b	a	Y
0	0	0	
0	0	1	
0	1	1	
0	1	0	
1	1	0	
1	1	1	
1	0	1	
1	0	0	

Table de vérité remplie en code Gray

La table de fonctionnement

Pour établir les relations entre les entrées et la ou les sorties, il est fait usage également de tables de fonctionnement.

Elles sont similaires aux tables de vérité, mais au lieu d'indiquer les états logiques des variables (0 ou 1), ce sont les niveaux logiques qui sont mentionnés (H ou L).

En électronique, ces tables sont utilisées dans la documentation des constructeurs de circuits électroniques logiques.

c	b	a	Y
L	L	L	
L	L	H	
L	H	L	
L	H	H	
H	L	L	
H	L	H	
H	H	L	
H	H	H	

Table de fonctionnement remplie en code binaire naturel

2.1.3 L'équation booléenne

L'équation booléenne est la représentation de la relation logique en utilisant des associations de fonction logique élémentaire.

2.2 Les fonctions logiques élémentaires

Les fonctions logiques élémentaires sont au nombre de trois (Voir tableau ci-dessous).

- **La fonction NON** : La sortie est l'inverse logique de l'entrée;
- **La fonction OU** : La sortie est à l'état 1 si au moins une entrée est à 1. *Elle représente un OU INCLUSIF.*
- **La fonction ET** : La sortie est à l'état 1 si toutes les entrées sont à 1.

2.3 Les fonctions logiques dérivées :

En composant les fonctions élémentaires précédentes, des fonctions logiques dérivées peuvent être construites.

La construction de fonctions logiques dérivées n'est pas limitée, mais elle peut être obtenue à partir des opérateurs logiques précédents.

Exemples: La fonction Y = (/a+b).c est réalisable avec une fonction NON, une fonction OU et une fonction ET.

3 RECHERCHE DES FONCTIONS LOGIQUES COMPLEXES.

3.1 Modifications des expressions logiques par l'algèbre de BOOLE :

Une fonction logique complexe peut être exprimée par une expression logique, faisant intervenir des opérateurs logiques élémentaires. Mais quelque fois, il est possible de simplifier cette expression ou de la modifier pour utiliser d'autres opérateurs logiques, afin de la réaliser technologiquement.

Exemple: Modification d'une expression afin de réaliser la fonction logique correspondante à partir d'opérateurs logiques **ET NON**.

Dans notre environnement beaucoup de systèmes physiques peuvent être modélisés en considérant des variables binaires *qui ne peuvent donc prendre que deux états*. Ces états logiques sont 0 et 1.

L'algèbre de BOOLE permet d'étudier ce type de système indépendamment de la technologie. Par exemple, un interrupteur (pneumatique, électrique, etc...) peut être ouvert ou fermé. La variable représentant cet interrupteur prendra donc deux états:

- état logique 1 lorsque l'interrupteur est fermé.
- état logique 0 lorsque l'interrupteur est ouvert.

1.1.1 Propriétés des opérateurs de l'algèbre de BOOLE

Seules deux opérations sont utilisées :

- le OU logique noté : +
- le ET logique noté : 1.

Propriétés de la fonction OU :

Le OU logique est commutatif : X+Y = Y+X.

Le OU logique est associatif : (X+Y)+Z = X+(Y+Z) = Y+(X+Z).

Propriétés de la fonction ET :

Le ET logique est commutatif : X1Y = Y1X.

Le ET logique est associatif : (X1Y)1Z = X1(Y1Z) = Y1(X1Z).

Propriétés communes :

Les deux opérations peuvent être distribuées l'une par rapport à l'autre. Ainsi :

X1(Y+Z) = X1Y + X1Z

X+(Y1Z) = X+Y 1 X+Z.

1.1.2 Propriétés de l'algèbre de BOOLE

Complémentation d'une variable binaire.

Lorsqu'une variable binaire est complémentée cela indique que l'information significative est le 0 logique. Lorsqu'une variable binaire n'est pas complémentée cela indique que l'information significative est le 1 logique. Si X=1 alors /X=0.

L'involution. L'absorption.

/(/X) = X X + /X1Y = X+Y

Identités remarquables.

X+0 = X X10 = 0
X+1 = 1 X11 = X
X+/X = 1 X1/X = 0

3.1.1 Enoncé du Théorème de DE MORGAN

Le théorème de DE MORGAN permet de simplifier les expressions logiques comportant des sommes ou produits complémentés.

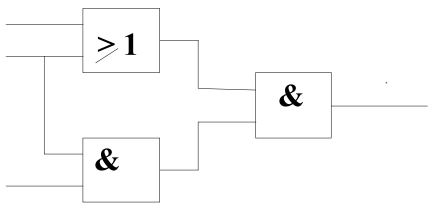
$$\overline{A \, . \, B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \, . \, \overline{B}$$

Ce théorème s'exprimant par les deux égalités d'expressions suivantes, permet la modification d'expressions logiques afin d'employer des opérateurs désirés (exemple : changer l'opérateur ET avec le OU).

3.2 Schéma logique fonctionnel ou logigramme

Le logigramme est une association organisée d'opérateurs binaires qui traduit fidèlement l'équation logique sans tenir compte des critères technologiques. Il est donc de portée très générale. C'est une représentation graphique qui vise les mêmes objectifs que le schéma.



Exemple de logigramme:

S = ...

Remarque:

Un logigramme n'est pas unique pour une même expression.